Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

1. Pojęcia ogólne

Definicja 1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego* nazywamy równanie

$$F(x,\ y(x),\ y'(x)) = 0\,, \tag{1}$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją niewiadomą, a $y'(x) \equiv \dfrac{dy}{dx}$, jest pochodną funkcji $y(x)$.

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem i niech funkcja $f(x, y)$ jest określona i ciągła w obszarze D.

Definicja 2. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego rozwiązanym względem pochodnej* nazywamy równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,. \tag{2}$$

Równanie różniczkowe (1) lub (2) może być zapisane w postaci symetrycznej

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,,$$

gdzie $P(x, y),\ Q(x, y)$ są funkcjami ciągłymi w D.

Niech $X \subset \mathbb{R}$ oznacza jeden z przedziałów postaci $(a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b]$. Zakładamy również, że X może być przedziałem nieograniczonym.

Definicja 3. Funkcję różniczkowalną $\varphi : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *rozwiązaniem* równania (1) lub (2), jeżeli dla każdego $x \in X$ punkt $(x,\ \varphi(x)) \in D$ oraz po podstawieniu $y = \varphi(x)$ do równania (1) lub (2) zamienia go w tożsamość.

Definicja 4. Funkcję postaci $y = \varphi(x, C)$, gdzie C jest dowolną stałą, nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* równania (1) lub (2), jeżeli dla każdej określonej wartości parametru C funkcja $y = \varphi(x)$ jest rozwiązaniem równania (1) lub (2).

Definicja 5. *Rozwiązaniem szczególnym* równania (1) lub (2) nazywamy każde rozwiązanie $y = \varphi(x, C_0)$ otrzymane z rozwiązania ogólnego poprzez nadanie parametrowi C wartości C_0.

Definicja 6. *Rozwiązaniem osobliwym* równania (1) lub (2) nazywamy takie rozwiązanie, które nie można otrzymać z rozwiązania ogólnego przy żadnej wartości parametru C.

Niech punkt $(x_0,\ y_0) \in D$.

Definicja 7. Równanie (1) lub (2) z warunkiem

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

nazywamy *zagadnieniem początkowym* lub *zagadnieniem Cauchy'ego.*

Definicja 8. Rozwiązanie równania (1) lub (2) $y = \varphi(x)$, które spełnia warunek (3) nazywamy *rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (*zagadnienia Cauchy'ego*) dla równania (1) lub (2).

2. Równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 9. Równanie różniczkowe zwyczajne, które można zapisać w postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{4}$$

nazywamy *równaniem o zmiennych rozdzielonych.*

Niech funkcje $f(x)$ i $g(y)$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach $X \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że $g(y) \neq 0$ dla każdego $x \in X$. Wtedy równanie (4) można zapisać formalnie w postaci

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

i scałkować obie strony równania. Zatem mamy

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C\,,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Stąd po obliczaniu całek otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (4).

Uwaga. Równanie o zmiennych rozdzielonych w formie symetrycznej ma postać

$$f(x)g(y)dy + p(x)h(y)dx = 0\,.$$

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-y}\sin x\,. \tag{5}$$

Rozwiązanie. Ponieważ $\mathrm{e}^{-y} \neq 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$, więc równanie (5) można zapisać w postaci

$$\mathrm{e}^{y}\,dy = \sin x dx\,.$$

Zatem mamy

$$\int \mathrm{e}^{y}\,dy = \int \sin x dx\,,$$

$$\mathrm{e}^{y} = -\cos x + C\,.$$

Więc funkcja postaci

$$y(x) = \ln(-\cos x + C)\,,$$

gdzie C jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem równania (5).

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$x^2 y dx + x^3 dy = 0\,. \tag{6}$$

Rozwiązanie. Niech $x^2 y \neq 0$. Wtedy rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0\,.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = C_1\,.$$

Po całkowaniu otrzymamy

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|, \text{ gdzie } C_1 = \ln|C|\,.$$

Stąd

$$xy = C\,,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą różną od zera.

Tak więc rozwiązanie ogólne równania (6) ma postać

$$y(x) = \frac{C}{x}\,.$$

Zauważmy, że $x = 0$ jest również rozwiązaniem równania (6). Ponadto rozwiązania tego nie da się otrzymać z rozwiązania ogólnego dla żadnej wartości C, co oznacza, że jest to rozwiązanie osobliwe. Natomiast $y = 0$ jest rozwiązaniem szczególnym, bo rozwiązanie to można otrzymać z rozwiązania ogólnego, jeżeli przypiszemy parametrowi C wartość 0.

Przykład 3. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\mathrm{e}^{x}\,dx - \left(1 + \mathrm{e}^{x}\right)y dy = 0\,, \tag{7}$$

$$y(0) = 1\,. \tag{8}$$

Rozwiązanie. Zapiszemy równanie (7) w postaci

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx\,.$$

Całkując obustronnie dostajemy

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx\,.$$

Zatem

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) + C\,.$$

Stąd podstawiając otrzymane rozwiązanie do warunku (8) mamy

$$\frac{1}{2} = \ln 2 + C\,.$$

Wtedy

$$C = \frac{1}{2} - \ln 2\,.$$

Tak więc rozwiązanie szczególne naszego równania (7) spełniające warunek (8) ma postać

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1+e^x\right) - \ln 2 + \frac{1}{2}\,.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego postaci

$$y = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}\,.$$

Równanie typu

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)\,, \tag{9}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$, sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych, jeżeli dokonamy podstawienia

$$t = ax + by + c\,.$$

Ponieważ

$$\frac{dt}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}\,,$$

więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dt}{dx} - a\right).$$

Podstawiając do równania (9) otrzymamy

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dt}{dx} - a\right) = f(t)\,.$$

Zatem rozdzielając zmienne mamy

$$dt = (bf(t) + a)dx\,,$$

$$\frac{dt}{bf(t)+a} = dx\,.$$

Całkując stronami otrzymamy rozwiązanie ogólne w postaci

$$x = \int \frac{dt}{bf(t)+a} + C\,.$$

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 2. \tag{10}$$

Rozwiązanie. Stosując podstawienie

$$t = y + x + 2$$

i różniczkując mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1.$$

Podstawiając do równania (10) otrzymamy

$$\frac{dt}{dx} - 1 = t.$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dt}{t+1} = dx.$$

Stąd

$$\int \frac{dt}{t+1} = \int dx.$$

Całkując mamy

$$\ln|t+1| = x + \ln|C|,$$

$$t + 1 = C\,\mathrm{e}^x.$$

Wracając do zmiennej y otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (10) postaci

$$y + x + 2 + 1 = C\,\mathrm{e}^x,$$

$$y = C\,\mathrm{e}^x - x - 3.$$

3. Równanie różniczkowe jednorodne

Definicja 10. Funkcja $f(x,y)$ jest *jednorodną* w $D \in \mathbb{R}$, jeżeli dla każdego punktu $(x,y) \in D$ i dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, spełniony jest warunek

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y).$$

Przykład 5. Funkcja $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ jest jednorodną, ponieważ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{2\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = f(x,y).$$

Definicja 11. Równanie (2) nazywamy *jednorodnym*, jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest jednorodną.

Równanie jednorodne można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych stosując standardowe podstawienie

$$t = \frac{y}{x} \quad \text{lub} \quad y = tx.$$

Stąd różniczkując mamy

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t.$$

Podstawiając do równania jednorodnego (2) otrzymamy

$$x\frac{dt}{dx} + t = g(t),$$

gdzie $g(t) = f(1,t)$. Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dt}{g(t)-t}=\frac{dx}{x}.$$

Otrzymane równanie jest, więc równaniem o zmiennych rozdzielonych. Zauważmy również, że jeżeli funkcja $t=\varphi(x,C)$ jest rozwiązaniem ogólnym tego równania, to wtedy funkcja $y=x\varphi(x,C)$ będzie również rozwiązaniem ogólnym równania (2).

Przykład 6. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}. \tag{11}$$

Rozwiązanie. Równanie (11) jest jednorodne (przykład 5). Więc stosujemy standardowe podstawienie

$$y=tx, \quad \frac{dy}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t.$$

Podstawiając powyższe równości do równania (11) mamy

$$t+x\frac{dt}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Stąd

$$x\frac{dt}{dx}=\frac{t+t^3}{1-t^2}.$$

Rozdzielając zmienne otrzymamy

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}dt,$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1-t^2}{t(t^2+1)}dt.$$

Stąd po całkowaniu dostaniemy

$$\ln|x|=\ln|t|-\ln|t^2+1|+\ln|C|.$$

Zauważmy, że całkę po prawej stronie obliczamy rozkładając funkcję podcałkową na ułamki proste. Zatem rozwiązanie ogólne ma postać

$$\frac{x(t^2+1)}{t}=C.$$

Powracając do zmiennej y dostajemy rozwiązanie ogólne równania (11) w postaci uwikłanej

$$x^2+y^2=Cy, \quad C\neq 0.$$

Ponadto funkcja $y=0$ jest również rozwiązaniem równania (11). Według definicji 6 jest to rozwiązanie osobliwe.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych oraz równania innych typów, które można do nich sprowadzić:

1. $2x^2\dfrac{dy}{dx}=y$;

2. $2y\dfrac{dy}{dx}=1-3x^2$;

3. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$;

4. $\sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy=0$;

5. $e^x(1+e^y)dx = e^y(1+e^x)dy$;
6. $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$;
7. $\dfrac{dy}{dx} = x + y + 3$;
8. $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$;
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x+y} + 2x + y - 2$;

Rozwiązać równania różniczkowe jednorodne:
10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$;
11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$;
12. $(y-2x)dy = (2y+x)dx$;

Rozwiązać zagadnienia Cauchy'ego:
13. $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0, \qquad y(0) = 1$;
14. $x^2 dx + y dy = 0, \qquad y(0) = 1$;
15. $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0, \qquad y(0) = -1$;
16. $\operatorname{ctg} x \dfrac{dy}{dx} + y = 2, \qquad y(0) = -1$;

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch